MISCELLANEA

În acest capitol sunt prezentate diverse concepte matematice care nu sunt parte integrantă a Analizei Matematice, dar care sunt folosite în cadrul acesteia.

ELEMENTE DE LOGICĂ

CALCULUL CU PROPOZIŢII

Propoziţia, adevărul şi falsul - noţiuni primare
Principalii operatori logici

Din punct de vedere logic o teorie ştiinţifică este un sistem de propoziţii (enunţuri, legi, afirmaţii) adevărate sau considerate altfel. Logica nu se ocupă cu definirea noţiunii de propoziţie şi nici a adevărului sau falsului, toate acestea fiind considerate noţiuni primare (nedefinite).

Dacă o propoziţie p este adevărată vom scrie $v(p) = 1$, iar dacă este falsă, $v(p) = 0$; simbolurilor 0 şi 1 le vom spune valori de adevăr, primul desemnând falsul, iar cel de al doilea adevărul.

Cele mai simple propoziţii sunt de forma "A este B". De exemplu: "Eminescu este autorul poeziei Luceafărul", "Balena este mamifer" etc. Pornind de la asemenea propoziţii simple, prin conectări diverse, se obţin propoziţii compuse. Logica îşi propune să studieze cum se transmit valorile de adevăr la propoziţiile compuse, construite cu ajutorul operatorilor logici.

Principalii operatori logici sunt:

1) **negaţia**, notată cu non sau cu $\rceil$ sau cu $\overline{\cdot}$ (în limbaj uzual NU).
2) **disjuncţia**, notată cu $\vee$ (în limbaj uzual SAU).
3) **conjuncţia**, notată cu $\wedge$ (în limbaj uzual ŞI).
4) **implicaţia**, notată cu $\to$ (în limbaj uzual DACĂ..., ATUNCI...).
5) **echivalenţa**, notată cu $\leftrightarrow$ (în limbaj uzual DACĂ ŞI NUMAI DACĂ).

Observaţii

1. *Dacă p şi q desemnează două propoziţii, atunci avem:*

$v(p)$	$v(q)$	$v(\overline{p})$	$v(p \vee q)$	$v(p \wedge q)$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

şi

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \to q)$	$v(p \leftrightarrow q)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

.

2. $(p \wedge q)$ *este* $\overline{\overline{p} \vee \overline{q}}$.

3. $(p \to q)$ *este* $(\overline{p} \vee q)$.

4. $(p \longleftrightarrow q)$ *este* $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

5. $v(p \longleftrightarrow q) = 1$ *dacă şi numai dacă* $v(p) = v(q)$.

6. *Dacă* $v(p) = 0$, *atunci* $v(p \to q) = 1$, *oricare ar fi propoziţia* q *(se spune că falsul implică orice).*

7. *Dacă* $v(q) = 1$, *atunci* $v(p \to q) = 1$, *oricare ar fi propoziţia* p.

8. *Pentru a afla valoarea de adevăr a implicaţiei* $p \to q$ *este suficient să examinăm doar cazul* $v(p) = 1$.

Definiţie. *O propoziţie compusă şi adevărată indiferent de ce valori de adevăr au propoziţiile care o compun se numeşte tautologie.*

Observaţii

1. *Dacă propoziţia* $(p \to q)$ *este adevărată vom nota* $p \Rightarrow q$ *şi vom spune că* p *este o condiţie suficientă pentru* q *sau că* q *este o condiţie necesară pentru* p.

2. *Dacă propoziţia* $(p \longleftrightarrow q)$ *este adevărată vom nota* $p \Leftrightarrow q$ *şi vom spune că* p *este o condiţie necesară şi suficientă pentru* q *(şi invers).*

Exerciţii

1. Să se găsească valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii compuse:

a) Dacă temperatura este sub zero grade, atunci apa îngheaţă.

b) Dacă apa fierbe la $100^\circ\ C$, atunci două corpuri încărcate cu electricitate de semne contrare se atrag.

Observaţie. *Exerciţiul anterior ne avertizează că trebuie să facem distincţie între implicaţia logică şi succesiunea cauză-efect din lumea fizică.*

2. Să se arate că următoarele propoziţii sunt tautologii:

a) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$, $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (comutativitate).

b) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (asociativitate).

c) $p \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p$, $p \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow p$ (absorţie).

d) $p \vee p \Leftrightarrow p$, $p \wedge p \Leftrightarrow p$ (idempotenţă).

e) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributivitate).

f) $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$, $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ (legile lui De Morgan).

g) $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ (principiul dublei negaţii).

3. Să se arate că următoarele propoziţii sunt tautologii:
a) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \Rightarrow (p \to r)$ (implicaţia este tranzitivă).
b) $((p \vee q) \to r) \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$.
c) $(p \wedge (p \to q)) \Rightarrow q$ (regula modus-ponens).
d) $(p \to q) \Leftrightarrow (\overline{q} \to \overline{p})$.

Observaţie. *Echivalenţa de mai sus se va folosi, spre exemplu, în cadrul observaţiei de la pagina 19, în care se prezintă o caracterizare alternativă a noţiunii de funcţie injectivă.*

4. Să se arate că $(p \to q) \Leftrightarrow (q \to p)$ nu este tautologie.
5. Să se afle negaţia propoziţiilor:
a) $(p \to q) \to r$
b) $p \to (q \to r)$.

CALCULUL CU PREDICATE

Constante şi variabile
Predicate (unare, binare, etc)
Cuantificatorul universal şi cuantificatorul existenţial

Printre semnele (simbolurile) întâlnite în propoziţiile matematicii se află constante şi variabile. Astfel se întâlnesc constante precum un număr, semnul de adunare, etc, toate având o semnificaţie precisă, care rămâne neschimbată în decursul desfăşurării raţionamentelor. Deosebirea capitală dintre constante şi variabile constă în aceea că în timp ce primele au o semnificaţie prin ele însele, ultimele nu au această semnificaţie. Spre exemplu propoziţia "$1 + 2i$ este un număr real" are un conţinut clar (este falsă), dar propoziţia "x este un număr real" nu are o semnificaţie precisă, ea capătă o astfel de semnificaţie numai după înlocuirea variabilei x.

Definiţie. *Expresiile de forma $p(x, y, z, ..)$, care atunci când înlocuim variabilele $x, y, z, ..$ cu constante, se transformă în propoziţii bine determinate, se numesc predicate unare, binare, etc, după cum avem $1, 2$, etc, variabile.*

Observaţie. *Operatorii logici studiaţi permit introducerea unor noi predicate.*
De exemplu, pentru predicatele $p(x)$ şi $q(x)$, putem considera noile predicate $\overline{p}(x), p(x) \vee q(x), p(x) \wedge q(x)$ etc.

În afara operatorilor logici de mai sus, în matematică, mai intervin şi alţi operatori, anume cuantificatorul universal, notat $\forall$, şi cuantificatorul existenţial, notat $\exists$. Prin cuantificatorul $\forall$ se trece de la predicatul $p(x)$ la propoziţia $(\forall x)\ p(x)$, care este falsă numai dacă există o constantă a astfel ca $p(a)$ să fie falsă. Prin cuantificatorul $\exists$ se trece de la predicatul $p(x)$ la propoziţia $(\exists x)\ p(x)$, care este adevărată numai dacă există (cel puţin) o constantă a astfel ca $p(a)$ să fie adevărată. Prin urmare, avem tautologiile $\overline{(\forall x)\ p(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\overline{p}(x)$ şi $\overline{(\exists x)\ p(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\overline{p}(x)$.

Observaţii

1. *Tautologiile de mai sus arată că prin negare $\forall$ se schimbă în $\exists$, iar $\exists$ se schimbă în $\forall$.*

2. *Avem următoarea proprietate de comutativitate a cuantificatorilor de acelaşi tip:*

$$(\forall x)(\forall y)\ p(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\ p(x,y) \text{ şi } (\exists x)(\exists y)\ p(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\ p(x,y)$$

sunt tautologii.

3. *Fie $p(x)$ şi $q(x)$ două predicate unare. Dacă propoziţia $(\forall x)\ (p(x) \to q(x))$ este adevărată, vom nota $p(x) \Rightarrow q(x)$. A arăta că propoziţia de mai sus este falsă înseamnă a găsi o constantă a astfel ca $p(a)$ să fie adevărată, iar $q(a)$ să fie falsă. Unui astfel de exemplu i se spune contraexemplu la propoziţia dată. Analog vom spune că $p(x)$ este echivalent cu $q(x)$ şi vom scrie $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ dacă propoziţia $(\forall x)(p(x) \longleftrightarrow q(x))$ este adevărată.*

Exerciţii

1. Să se arate că oricare ar fi predicatul binar $p(x,y)$, avem $(\exists x)(\forall y)\ p(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\ p(x,y)$. Este adevărată implicaţia reciprocă?

Observaţie extrem de importantă. *Exerciţiul de mai sus arată că ordinea cuantificatorilor logici este extrem de importantă.* Acest lucru se poate constata comparând noţiunile de continutate şi continuitate uniformă, de convergenţă simplă şi convergenţă uniformă pentru şiruri de funcţii etc.

ELEMENTE DE TEORIA MULŢIMILOR

Meritul nemuritor al lui Georg Cantor este acela de a se fi hazardat în domeniul infinitului fără a se teme de lupta, interioară sau externă, nu numai cu paradoxurile imaginare, cu prejudecăţile larg răspândite, cu sentinţele filozofilor, dar şi cu opiniile exprimate de mari matematicieni. În acest mod el a creat un nou domeniu – teoria mulţimilor.

F. Hausdorff

Mulţimea ca noţiune primară
Noţiunea de submulţimne a unei mulţimi
Egalitatea a două mulţimi
Intersecţia şi reuniunea a două mulţimi
Mulţimea vidă
Mulţimi disjuncte
Diferenţa a două mulţimi
Complementara unei mulţimi în raport cu o altă mulţime
Produsul cartezian a două mulţimi

Funcţiile manifestă din când în când o comportare particulară în anumite puncte din domeniul lor de definiţie, care în cazurile cele mai importante este un interval, ele posedă acolo ”singularităţi”. H. Hankel se ocupase deja cu astfel de chestiuni şi expusese principiul său de ”condensare a singularităţilor”. Astfel de puncte singulare scot în relief, în intervalul care formează argumentul funcţiei, anumite ”varietăţi” sau totalităţi, care deşi constituie numai o parte a punctelor intervalului, pot conţine infinit de multe puncte. Se ridică problema structurii unor astfel de varietăţi sau mulţimi (de puncte) infinite.

Pe această cale a ajuns Georg Cantor la a sa teorie a mulţimilor. La extinderea teoremei de unicitate a reprezentărilor seriilor trigonometrice în cazul că pentru un număr infinit de valori seria nu este convergentă, el s-a văzut nevoit încă din 1872 să anticipeze anumite discuţii, chiar dacă numai ”aluzive”, care ”pot servi să pună în lumină relaţii ce apar totdeauna atunci când se dau mărimi numerice în număr finit sau infinit”. (Este vorba de concepte ca ”punct de acumulare”, ”punct limită”, ”derivare” la mulţimi de puncte ş.a.).

Totuşi, înainte de a ajunge la teoria mulţimilor a lui Cantor, avem de citat unii precursori ai săi. Cele mai vechi consideraţii care se referă la un ”paradox al infinitului” provin chiar din perioada finală a antichităţii; ele se găsesc în comentariul lui Proclos asupra lui Euclid, însă nu descoperite, ci numai relatate de el, din nefericire fără să numească un nume.

Fundamentele Matematicii, Oskar Becker, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1968, paginile 247-248

Mulţimea ca noţiune primară

Conceptul de mulţime este unul de bază în matematică. Toate obiectele matematice se reduc, în ultimă instanţă, la acest concept. Vom considera că această noţiune este deja asimilată din anii de liceu. Nu vom încerca să definim noţiunea de mulţime sau să prezentăm axiomele teoriei mulţimilor. Studentul interesat poate vedea modul în care materialul pe care-l vom prezenta poate fi axiomatizat, consultând următoarele lucrări: *Paul Halmos*, **Naive Set Theory**, Springer - Verlag, 1974; *Paul Bernays (* with a historical introduction by *Abraham Fraenkel)*, **Axiomatic set theory**, North-Holland Publishing Company, 1991. Prin urmare vom prezenta aici numai câteva elemente de teoria naivă a mulţimilor, teorie ale cărei baze au fost puse de către matematicianul german Georg Cantor. În timp au fost puse în evidenţă o serie de slăbiciuni ale teoriei mulţimilor, aşa cum a fost ea dezvoltată de către Cantor. Pentru a remedia această situaţie, o nouă teorie a mulţimilor a fost elaborată de către Ernst Zermelo şi Adolf Fraenkel şi dezvoltată de către Kurt Gödel şi Paul Cohen (pentru detalii, se poate consulta lucrarea **Kurt Gödel (1906-1975)**, de *Ralf Schindler*, Gazeta Matematică, seria A, nr.1, 2008, paginile 72-76).

Notă istorică. *Georg Cantor* (1845-1918) s-a născut la Sankt Petersburg. A studiat la Universitatea din Berlin, cu Weierstrass, Kummer şi Kronecker, unde devine prietenul lui Schwarz. Aici preocupările lui privesc teoria numerelor. În 1869 primeşte un post la Universitatea din Halle. Sub influenţa lui Heine, cercetările lui Cantor se vor îndrepta către analiza matematică. În 1870 el va demonstra unicitatea reprezentării unei funcţii cu ajutorul unei serii trigonometrice (problemă care, în prealabil, a fost studiată, fără succes, de mulţi matematicieni celebri, printre care Heine, Dirichlet, Lipschitz şi Riemann). În 1872 este promovat ca profesor extraordinar la Universitatea din Halle. În acelaşi an, în decursul unei excursii în Elveţia, îl va întâlni pe Dedekind, cu care va avea o prietenie solidă. Tot în 1872, Cantor publică un articol privind seriile trigonometrice, în care defineşte numerele reale în termeni de şiruri convergente de numere raţionale. În 1873 Cantor a arătat că mulţimea numerelor raţionale (precum şi mulţimea numerelor algebrice) este numărabilă. În 1874 publică un articol în care arată că mulţimea numerelor reale nu este numărabilă. Mai mult, într-o scrisoare din anul 1877 către Dedekind, arată că între punctele intervalului $[0, 1]$ şi punctele din $\mathbb{R}$ există o corespondenţă bijectivă. Cantor a fost surprins de această descoperire, fapt care l-a făcut să exclame: ”Deşi am demonstrat acest lucru, nu-l pot crede”. În 1878 publică un articol în care apare în mod riguros noţiunea de corespondenţă bijectivă. Între 1879 şi 1884 publică o serie de şase articole în Mathematische Annalen, în care se prezintă o introducere în teoria mulţimilor. Ideile sale prezentate aici au fost întâmpinate cu ostilitate de către mulţi matematicieni. În 1879, la sugestia lui Heine, este promovat la gradul de profesor. În 1896 el îi scrie lui Hilbert, prezentându-i paradoxurile pe care le-a descoperit în cadrul teoriei mulţimilor. Moare în 1918 într-un azil de boli mentale.

Cantor rămâne în istoria matematicii ca fondatorul teoriei moderne a mulţimilor şi ca cel care a introdus conceptul de număr infinit (prin introducerea numerelor cardinale). Până la el infinitul era, în matematică, un subiect tabu. Conform lui Gauss, infinitul putea fi utilizat numai ca "un fel de a spune" care nu are valoare matematică. Ideile lui Cantor au determinat reevaluarea fundamentelor tuturor ramurilor matematicii şi au dat acesteia forma modernă de astăzi.

Noţiunea de submulţime a unei mulţimi

$x \in A$ înseamnă că x este un element al lui A; se mai spune că x aparţine lui A sau că mulţimea A conţine elementul x. $x \notin A$ înseamnă că x nu aparţine lui A.

Definiţie. *Fie A şi B două mulţimi. Spunem că A este o submulţime a lui B dacă orice element al lui A este şi element al lui B. În acest caz scriem $A \subseteq B$. Dacă $A \subseteq B$, dar există un element al lui B care nu este element al lui A, spunem că A este o submulţime proprie a lui B şi scriem $A \subset B$.*

Egalitatea a două mulţimi

Definiţie. *Două mulţimi A şi B se numesc egale dacă conţin aceleaşi elemente. În acest caz scriem $A = B$.*

Observaţie. $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B$ *şi* $B \subseteq A)$.

Intersecţia şi reuniunea a două mulţimi; Mulţimea vidă; Mulţimi disjuncte

Definiţie. *Dacă A şi B sunt două mulţimi, atunci intersecţia lor, notată $A \cap B$, este mulţimea tuturor elementelor care aparţin ambelor mulţimi.*

Definiţie. *Dacă A şi B sunt două mulţimi, atunci reuniunea lor, notată $A \cup B$, este mulţimea tuturor elementelor care aparţin cel puţin uneia dintre cele două mulţimi.*

Observaţii

1. *Avem* $A \cap B = \{x \mid x \in A$ *şi* $x \in B\}$ *şi* $A \cup B = \{x \mid x \in A$ *sau* $x \in B\}$.

CUPRINS